**Tentamen Statistiek MBW/KW (deel 2, eerste kans)**

Afdeling: Propedeuse MBW/KW 2020-2021

Examinator: Dr. J.B.M. Melissen

Datum: 23 juli 2021, duur tentamen: 2 uur

1. **Alle antwoorden moeten gemotiveerd worden**!

2. Rond eindantwoorden (kommagetallen) af op *vier* decimalen, tenzij anders vermeld.

3. Boeken, reader en aantekeningen mogen worden geraadpleegd.

4. De aanwezigheid van *communicatieapparatuur* is niet toegestaan.

5. Het gebruik van een (grafische) rekenmachine met statistische programmatuur en het

raadplegen van de bijbehorende handleiding is toegestaan. Het *statistische* gebruik van deze

rekenmachine is bij een aantal onderdelen ingeperkt. Let op de aanwijzingen!

6. **De opgaven dienen na afloop van het tentamen ingeleverd te worden.**

Dit tentamen bestaat uit vier opgaven (30, 20, 20, 30 punten) plus een bonusopgave met 10 bonuspunten). Score = Puntentotaal/10. De totale score kan de 10 niet overschrijden.

**Opgave 1 (Totaal 30 punten)**

In het kader van een NAVO missie zijn vier F16’s van de Koninklijke Luchtmacht gestationeerd op de RAF luchtmachtbasis van Akrotiri op Cyprus om van daaruit dagelijks missies te vliegen boven brandhaarden in het Midden-Oosten. Een week lang wordt dagelijks de verbruikte hoeveelheid kerosine bijgehouden. Dit leidt tot de volgende waarden: 26.500, 22.300, 31.800, 19.900, 25.500, 29.200, 27.400 (lbs = Amerikaanse pound). Neem aan dat de hoeveelheden (kansvariabele die het kerosineverbruik per dag in lbs voorstelt) normaal verdeeld zijn, elke dag met dezelfde verwachtingswaarde en standaarddeviatie.

**1a. [4pt]** Bereken van de gemeten waarden het steekproefgemiddelde.

Laat met behulp van een berekening zien dat de steekproefstandaarddeviatie gelijk is aan 4024,6857.

**2pt**

**2pt**

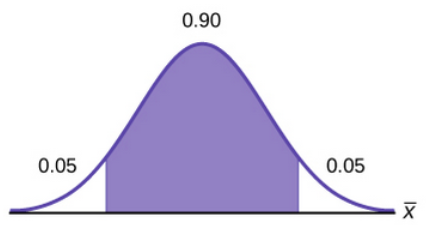
Let op, gebruik de steekproefstandaarddeviatie (delen door , i.p.v. door )

**1b. [2pt]** In welke eenheid moet de steekproefstandaarddeviatie worden uitgedrukt?

Opties:

* Geen, gewoon een getal, dimensieloos
* lbs net als **2pt**
* lbs2 want in de berekening wordt gekwadrateerd
* liters, want het is een inhoud.
* Kan niet worden bepaald op grond van de gegevens

**1c. [6pt]** Bereken een 90% betrouwbaarheidsinterval voor het verwachte dagelijkse kerosineverbruik , op grond van bovengenoemde steekproef, zonder daarbij gebruik te maken van de optie TESTS/Interval van de grafische rekenmachine. **Rond de grenzen van dit interval af op veelvouden van 100 lbs en wel zodanig dat de 90% betrouwbaarheid gewaarborgd blijft.**

Omdat de standaarddeviatie van niet bekend is (en bovendien de steekproefgrootte kleiner is dan 30) en geschat wordt met moet de -verdeling worden gebruikt. De -waarde bij 90% betrouwbaarheid voor een tweezijdig interval is

**2pt**

De linkeroverschrijdingskans van is dan 0,90 in het betrouwbaarheidsinterval plus de helft van de overige 0,10 (=0,05) in het interval links daarvan (totaal 0,95).

Het midden van het betrouwbaarheidsinterval is het verwachte dagelijkse kerosineverbruik . Die is niet bekend, maar die wordt geschat aan de hand van de gemiddelde van zeven dagwaarden (steekproefgemiddelde) . Die waarde is normaal verdeeld met gemiddelde en standaarddeviatie . We gebruiken hiervoor de schattingen en en de -verdeling voor de berekening.

Het betrouwbaarheidsinterval van is dan

**2pt**

Afronden mag het interval niet kleiner maken, afronden naar buiten: . **2pt**

**1d. [8pt]** Toets: tegen . Bepaal de toetsuitslag door het berekenen van een kritiek gebied op basis van de gegeven steekproef van zeven dagen kerosineverbruik. Kies als onbetrouwbaarheid α = 0,10.

Leg in simpele bewoordingen uit wat de uitslag van deze toets betekent voor het dagelijks kerosineverbruik.

We zoeken de (kleinste) grens van het kritieke gebied , zodanig dat de kans op een fout van de eerste soort (je verwerpt H0, terwijl H0 toch waar is) hoogstens α = 0,10 is:

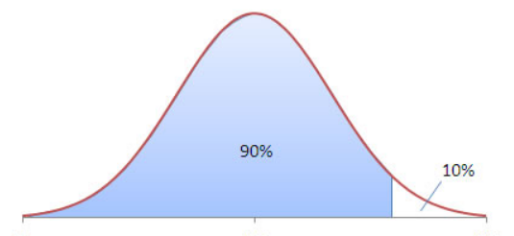
is hierin het kerosineverbruik per dag, gemiddeld over zeven dagen, dat is normaal verdeeld met gemiddelde (want aangenomen wordt dat H0 geldt) en standaarddeviatie .

We nemen de worst case situatie voor waarvoor nog H0 geldt: , want

Want als de rechter term , dan geldt dat zeker ook voor de linker:

Voor gebruiken de schatting en daarom moeten we gebruik maken van de -verdeling.

De t-waarde dir hoort bij een linkeroverschrijdingskans van 0,10 (rechteroverschrijdingskans 0,90) is , **2pt**

dus . **2pt**

(Let op dat de berekening van de -waarde anders gaat dan in 1b, omdat daar het interval tweezijdig was en hier enkelzijdig).

Het steekproefgemiddelde is groter dan de kritieke waarde , ligt dus in het kritieke gebied dus H0 wordt verworpen. **2pt**

De conclusie is dat met 90% betrouwbaarheid kan worden gesteld dat het dagelijks kerosineverbruik minimaal 23.800 lbs is. **2pt**

**1e. [5pt]** Hoeveel kerosine moet er **dagelijks** minimaal op voorraad zijn voor het Nederlands contingent, wil met 99% zekerheid aan de dagelijkse behoefte kunnen worden voldaan? (Antwoord afgerond op honderden lbs).  
Noem de gezochte minimale dagelijkse hoeveelheid , dan is de kans dat deze hoeveelheid voldoende is (het werkelijke kerosineverbruik is dan maximaal ) minstens 99%, dus

, dus, worst case is .

Nu is , het kerosineverbruik van één dag, normaal verdeeld met gemiddelde en standaarddeviatie . We gebruiken hiervoor weer de schattingen en en daarom dus de -verdeling.

We zoeken een linkszijdig interval met kans 0,99. Dat correspondeert met een -waarde van , **2pt**

dus . **2pt**

Rond naar boven af om zeker te weten dat de afgeronde hoeveelheid voldoende is: 38.800 lbs. **1pt**

**1f. [5pt]** Hoeveel kerosine moet er **op weekbasis** minimaal op voorraad zijn wil met 99% zekerheid aan de dagelijkse behoefte van de F16’s kunnen worden voldaan? (Antwoord afgerond op honderden lbs).  
Leg uit waarom deze hoeveelheid minder is dan zevenmaal de hoeveelheid die in 1e is berekend.

We noemen het totale kerosineverbruik van één week, dat is normaal verdeeld met gemiddelde en standaarddeviatie (want en gelden per dag). We gebruiken hiervoor de schattingen en en dus ook weer de -verdeling.

Noem de gezochte minimale wekelijkse hoeveelheid , dan moet de kans dat deze hoeveelheid voldoende is om het werkelijke kerosineverbruik te dekken minstens 99%, zijn dus , dus, worst case is .

We zoeken een linkszijdig interval met kans 0,99. Dat correspondeert weer met een -waarde van , dus . **2pt**

Rond naar boven af om zeker te zijn dat de afgeronde waarde ook met 99% kans voldoende is: 216.100 lbs. **1pt**

De eis is nu veel minder streng dan volgens 1d, want dan zou je elke dag aan een eis moeten voldoen, en wat je dagelijks over houdt zou je in die berekening niet gebruiken voor een volgende dag. Je hebt dan lbs nodig. Als je de hele weekvoorraad ter beschikking hebt en alleen aan het eind van de week hoeft uit te komen heb je genoeg aan een kleinere voorraad. **2pt**

**Opgave 2 (Totaal 20 punten).** Het aantal ontplofte bermbommen per week in en om de door de terreurbeweging Talibom belaagde stad Al-â-Kabum is gedurende 100 weken geregistreerd (zie tabel).

|  |  |
| --- | --- |
| **IED’s**  **per week** | **Frequentie** |
| 0 | 35 |
| 1 | 33 |
| 2 | 18 |
| 3 | 3 |
| ≥ 4 | 2 |
| Totaal | 91 |

**In deze opgave staat een onjuistheid, want volgens de tabel heeft registratie plaatsgevonden gedurende 91 weken, terwijl in de tekst 100 weken wordt genoemd.**

**2a. [8pt]** Toets of het aantal meldingen per week is te beschouwen als een kansvariabele die een Poissonverdeling volgt met , door het uitrekenen van een -waarde. Kies als betrouwbaarheid 97%.

**2a.** We berekenen eerst de frequenties zoals ze uit de Poissonverdeling met zouden volgen:

,

,

, 0

**2pt**

Omdat de verwachte frequenties en te klein zijn voor toepassing van Chikwadraat (< 5) nemen we de laatste twee categorieën samen tot , waardoor de verwachting daarvan groter dan 5 wordt (zie tabel). **2pt**

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| **IED’s**  **per week** | **Frequentie**  **Observed** | **Frequentie**  **Expected** |
| 0 | 35 | 36,63 |
| 1 | 33 | 33,33 |
| 2 | 18 | 15,16 |
| ≥ 3 | 5 | 5,88 |
| Totaal | 91 | 91 |

Kijken of Ei en Oi voldoende op elkaar lijken doen we met een aanpassingstoets. De toetsingsgrootheid is

We toetsen hiermee

H0: De waargenomen frequenties kunnen worden verklaard met een Poissonverdeling met .

H1: De waargenomen frequenties kunnen niet zo worden verklaard. **1pt**

Dat kan het snelst door de -waarde uit te rekenen (met vrijheidsgraden):

**2pt**

Dit is groter dan dus H0 wordt niet verworpen, dus er kan met 97% betrouwbaarheid worden gezegd dat er geen reden is om te twijfelen dat de tabel kan worden verklaard met de Poissonverdeling met . **1pt**

**2b. [5pt]** Voer de toets ook uit door berekening van het kritieke gebied.

2b. Je kunt ook met een kritiek gebied en grenswaarde werken, dan moet je met de GR oplossen

**3pt**

Dat geeft De waarde ligt niet in het kritieke gebied , dus H0 wordt niet verworpen. **2pt**

**2c. [2pt]** Kan het zijn dat de aanpakken van 2a en 2b leiden tot verschillende conclusies? Leg uit!

# Nee, er komt altijd hetzelfde uit. Het kritieke gebied is het grootste interval waarvoor de overschrijdingskans gelijk is aan de gegeven . Rechts van (in het kritieke gebied) is de overschrijdingskans (de -waarde) dus kleiner of gelijk aan (=verwerpen) en links daarvan (buiten het kritieke gebied) is het groter (niet verwerpen). De conclusies zijn dus hetzelfde.

**2pt**

**2d. [5pt]** Leg uit waarom de waarde de meest geschikte is om te kiezen voor de Poissonverdeling.

Een Poissonverdeling beschrijft verschijnselen die niet vaak, maar wel geregeld en onafhankelijk van elkaar optreden per vaste periode. **2pt**

Dat zou hier kunnen gelden.

**Het volgende is goed gerekend, maar is eigenlijk onjuist:**

In 100 weken waren er 91 bommen, dat is gemiddeld per week, dat verklaart de gekozen waarde van . **3pt**

**Dit had moeten zijn:**

**De waarde van 0,91 is niet de meest geschikte. Het aantal weken is namelijk 91 (zie tabel), het aantal bermbommen in die periode was Gemiddeld is dat bermbommen per week, dus dat zou de meest geschikte waarde voor zijn geweest**

**Opgave 3 (Totaal 20 punten)**

In 2017 werden 400 personen in een online testpanel bevraagd over hun politieke voorkeur en hun begrip voor de maatregelen die toenmalig president Trump van de VS per twitter aankondigde. Voor het gemak wordt hierbij onderscheid gemaakt naar de politieke groeperingen *PVV*, *VVD* en *Overig*. De resultaten – gerangschikt naar politieke voorkeur en het wel/niet begrip tonen voor de decreten van president Trump – staan vermeld in

onderstaande tabel:

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
|  | Wel begrip | Geen begrip | totaal |
| PVV | 58 | 1 | 59 |
| VVD | 41 | 40 | 81 |
| Overig | 61 | 199 | 260 |
| Totaal | 160 | 240 | 400 |

**3a. [10pt]** Ga met een homogeniteitstoets na of er sprake is van samenhang tussen *politieke voorkeur* en *het wel/geen begrip hebben voor Trump*. Formuleer eerst een nulhypothese en een alternatieve hypothese. Bepaal deuitslag van de toets via een kritiek gebied. Kies .

Bij homogeniteit (= onafhankelijkheid ) is de verwachte uitslag:

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
|  | Wel begrip | Geen begrip | totaal |
| PVV | 23,6 | 35,4 | 59 |
| VVD | 32,4 | 48,6 | 81 |
| Overig | 104,0 | 156,0 | 260 |
| Totaal | 160 | 240 | 400 |

Bijvoorbeeld **3pt**

H0: Het begrip voor maatregelen van Trump is onafhankelijk van de politieke voorkeur.

H1: Het begrip voor maatregelen van Trump hangt af van de politieke voorkeur.

Bereken de waarde van :

**4pt**

De overschrijdingskans is is veel kleiner dan , dus H0 moet worden verworpen. **3pt**

(Het kritieke gebied is (5,9915 , ∞), daar ligt de waarde van in, dus H0 verwerpen)

Dat betekent dat het begrip voor de maatregelen van Trump afhangt van de politieke voorkeur. Waarom is de waarde zo groot dat H0 moet worden verworpen? De grootste bijdragen liggen bij de PVV (50,1424 en 33,4282). Bij de PVV aanhang heeft 98,3% begrip, terwijl dat in totaal maar 40% is.

Volgens de Peilingwijzer kon de PVV rekenen op 19% aanhang, de VVD op 16%, terwijl de overige politieke groeperingen 65% voor hun rekening namen.

**3b. [10pt]** Is deze steekproef van 400 respondenten een afspiegeling van de verdeling die door de Peilingwijzer werd gemeten? Beantwoord de vraag door het uitvoeren van een aanpassingstoets. Maak gebruik een berekening van de -waarde. Kies α = 0,05.

Bij de aanpassingstoets wordt gekeken of de aantallen respondenten per partijvoorkeur in de tabel kloppen met de verdeling die de Peilingwijzer voorspelt. Bij 400 respondenten voorspelt de Peilingwijzer 0,19 X 400=76 PVVers, 64 VVDers en 260 overigen.

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  | Gemeten | Voorspeld |
| PVV | 59 | 76 |
| VVD | 81 | 64 |
| Overig | 260 | 260 |
| Totaal | 400 | 400 |

**3pt**

H0: De verdeling van bevraagde respondenten over de partijvoorkeur komt overeen met de voorspelling van de Peilingwijzer.

H1: De verdeling van bevraagde respondenten over de partijvoorkeur komt niet overeen met de voorspelling van de Peilingwijzer.

**1pt**

**3pt**

De overschrijdingskans is  *.* **2pt**is veel kleiner dan , dus H0 moet worden verworpen.

(Het kritieke gebied is (5,9915 , ∞), daar ligt de waarde van in, dus H0 verwerpen) **1pt**

Dat betekent dat de verdeling van respondenten niet overeenkomt met die van de Peilingwijzer. De grootste bijdragen aan zijn bij de PVV en VVD. Er zijn teveel VVDers en te weinig PVVers ondervraagd.

**Opgave 4 (Totaal 25 punten)**

In een stad is de gemeente zich bewust van de toenemende vereenzaming bij ouderen. Daarom is men een actie begonnen, waarbij gemeentemedewerkers de wijken in trekken en daar bewoners aanspreken en voorlichten in de hoop dat zich vrijwilligers aanmelden die af en toe willen gaan buurten bij een contactbeperkte buurtgenoot. De actie heeft gelopen in acht wijken en de wethouder wil laten onderzoeken of er een verband is tussen het aantal uren dat zijn medewerkers in een wijk besteden en het aantal vrijwilligers dat dit oplevert. De resultaten tot nu toe staan in de volgende tabel. Hierbij gaat het om vrijwilligers die zich niet alleen hebben aangemeld, maar ook daadwerkelijk actief zijn met begeleiden.

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| **Wijk** | **uren** | **vrijwilligers** |
| 1 | 38 | 8 |
| 2 | 40 | 8 |
| 3 | 44 | 10 |
| 4 | 47 | 12 |
| 5 | 52 | 15 |
| 6 | 35 | 7 |
| 7 | 46 | 12 |
| 8 | 50 | 14 |

**4a [5pt]** Bereken handmatig de correlatiecoëfficiënt van Pearson. Bepaal of er sprake is van een lineaire correlatie tussen de uren die door de gemeente werden besteed en het aantal vrijwilligers dat dit opleverde.

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| X | Y | X^2 | Y^2 | XY |
| 38 | 8 | 1444 | 64 | 304 |
| 40 | 8 | 1600 | 64 | 320 |
| 44 | 10 | 1936 | 100 | 440 |
| 47 | 12 | 2209 | 144 | 564 |
| 52 | 15 | 2704 | 225 | 780 |
| 35 | 7 | 1225 | 49 | 245 |
| 46 | 12 | 2116 | 144 | 552 |
| 50 | 14 | 2500 | 196 | 700 |
| **44** | **10,75** | **1966,75** | **123,25** | **488,125** |

**3pt**

**1pt**

De waarde is dicht bij 1, dus een zeer goede positieve correlatie. **1pt**

**4b [7pt]** Bereken de regressielijn en maak een schets van de puntenwolk en de regressielijn.

**2pt**

**3pt**

**2pt**

**4c [3pt]** De regressielijn voorspelt dat nul uren van de gemeente een negatief aantal vrijwilligers oplevert, m.a.w. niets doen kost vrijwilligers! Hoe valt dit uit te leggen? Probeer minstens twee verklaringen te vinden.

* Het kan zijn dat uren worden besteedt aan overhead, zoals rapportage, reistijd, frietje pikken, die niet leiden tot vrijwilligers.
* Of het kan zijn dat tussen 35 en 55 uren het verband mooi lineair is, maar dat dat niet meer geldt tussen 0 en 35.
* Of medewerkers ronden hun tijd systematisch naar boven af (declareren te veel uren, waardoor de grafiek naar rechts schuift.

**4d [3pt]** Bereken een statistisch verantwoorde voorspelling van het verwachte aantal vrijwilligers dat zich aanmeldt als de gemeente 60 uur in een wijk aan voorlichting besteedt.

Vul uur in in de regressielijn: y=18,6217 (niet afronden, het is een verwachtingswaarde)

**4e [7pt]** Bereken een 95% voorspellingsinterval voor aantal vrijwilligers dat 60 uur werk van de gemeente waarschijnlijk gaat opleveren.

Een **voorspellingsinterval** is een interval met een bepaalde betrouwbaarheid voor de waarde van -waarde die hoort bij voor **een specifiek geval**.

**1pt**

is de -waarde die hoort bij de opgegeven betrouwbaarheid 95% met vrijheidsgraden:

**2pt**

**4pt**

======== XXXXXXXX ========